ODVOD KOMPOZITUMA DVEH FUNKCIJ

Vaja je namenjena samostojnemu spoznavanju pravila za odvod kompozituma dveh funkcij. Dijaki jo lahko dobijo v obliki domače naloge, ali jo delajo v šoli. Pogosto se dobro obnese, če jo delajo v parih ali manjših skupinah. Če so skupine primerno izbrane (v skupini kakšen boljši "matematik" in kakšen "računalničar") je učinek pogosto boljši kot pri samostojnem delu. Seveda je nujno, da po izvedenih vajah dijaki poročajo, tako da imamo možnost skupaj oblikovati ustrezne zaključke.

V tabeli 1 je zapisanih več funkcij, ki so vse oblike

`sin(f(x))`

Če je `y = sin(x)`, je `y' = cos(x)`.

y =	y' =	y =	y' =
x - 2	1	sin(x - 2)	cos(x - 2)
3x	3	sin(3x)	3 cos(3x)
3x - 4	3	sin(3x - 4)	3 cos(3x - 4)
3^x	3^x LN(3)	sin(3^x)	3^x ·LN(3)·COS(3^x)
x^2	2x	sin(x^2)	2x cos(x^2)
x^3 - 5x + 7	3x^2 - 5	sin(x^3 - 5x + 7)	(3x^2 - 5) sin(x^3 - 5x + 7)
x^7 - 7	7x^6	sin(x^7 - 7)	7x^6 COS(x^7 - 7)

Ker so vsi rezultati, ki jih vrne *DERIVE*, v pričakovani obliki, dijaki praviloma nimajo težav s prepoznavanjem vzorca. Nekaj težav dela formalni zapis pravila

$$(\sin(f(x)))' = f'(x) \cdot \cos(f(x)),$$

z besedami pa običajno točno opišejo, za kaj gre.

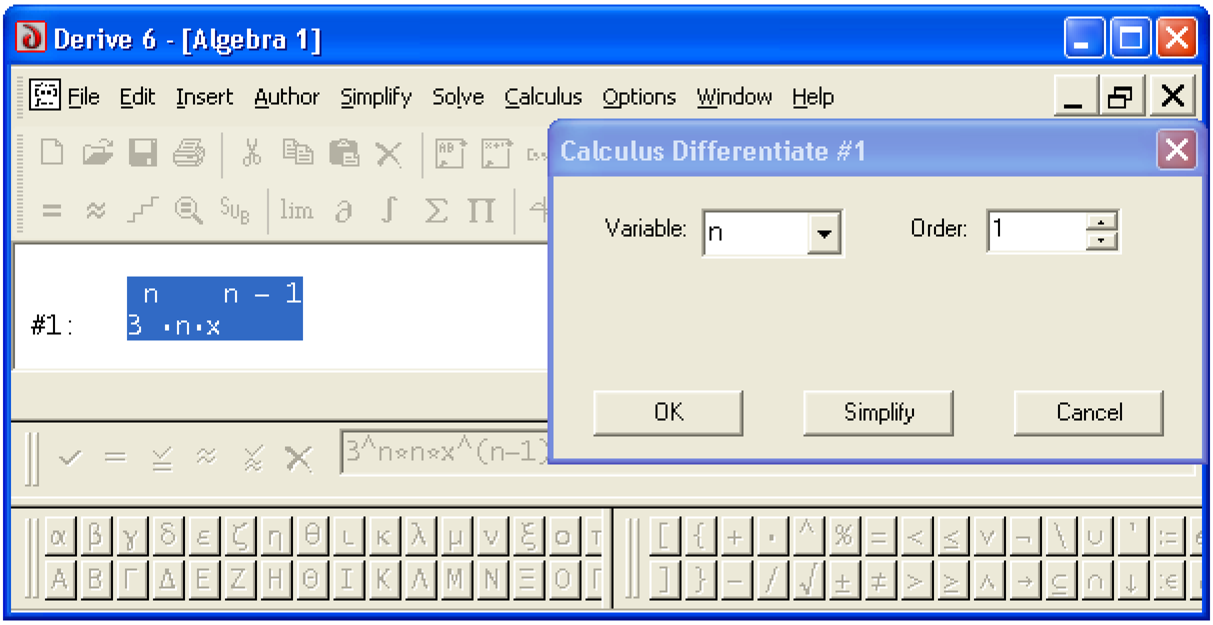
Če je `y = cos(x)`, je `y' = - sin(x)`.

y =	y' =	y =	y' =
x - 2	1	cos(x - 2)	- sin(x - 2)
3x	3	cos(3x)	-3 sin(3x)
3x - 4	3	cos(3x - 4)	-3 sin(3x - 4)
3^x	3^x LN(3)	cos(3^x)	-3^x ·LN(3)·SIN(3^x)
x^2	2x	cos(x^2)	-2x sin(x^2)
x^3 - 5x + 7	3x^2 - 5	cos(x^3 - 5x + 7)	(5 - 3x^2) sin(x^3 - 5x + 7)
x^7 - 7	7x^6	cos(x^7 - 7)	-7x^6 SIN(x^7 - 7)

Tudi tu velja podobno kot pri funkciji sinus. Nekaj zmede lahko povzroči predzadnji primer, ko *DERIVE* minus skrije v izraz v oklepaju. Težave so lahko z ugotavljanjem, ali je `f'(x) · (-sin(f(x)))` enako `-f'(x) · sin(f(x))`. Spet lahko pričakujemo težave pri formalnem zapisu.

$$(\cos(f(x)))' = f'(x) \cdot (-\sin(f(x)))$$

Pri naslednji funkciji nastopijo določene tehnične težave. Če nismo dovolj pozorni, spregledamo, da nam *DERIVE* ponudi odvajanje po n ali po x. Presodimo, ali velja na to opozoriti vnaprej, ali pa pustimo možnost napak in s tem ustvarimo pogoje za ponoven pogovor o tem, kaj je pri x^n funkcijska spremenljivka.

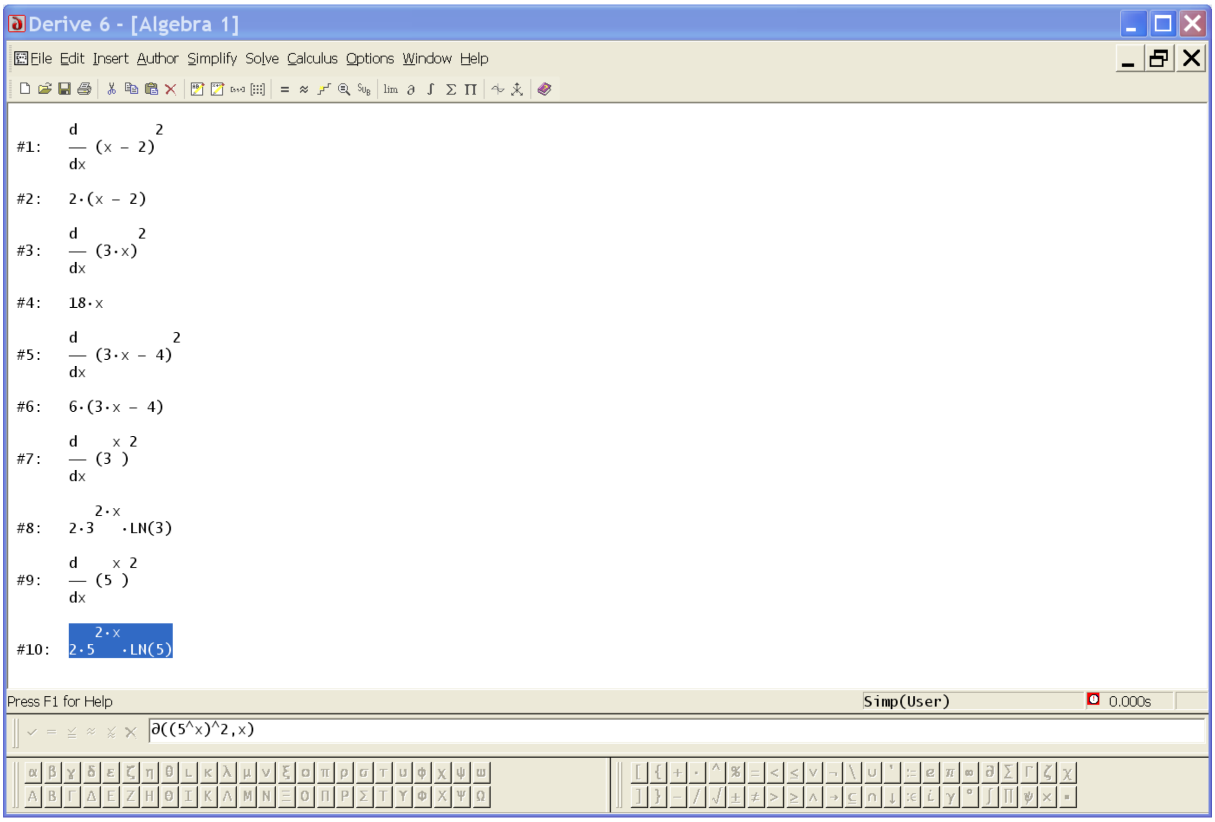


y =	y’ =	y =	y’ =
x - 2	1	(x - 2)^n	n(x - 2)^(n-1)
3x	3	(3x)^n	3^n n x^(n-1)
3x - 4	3	(3x - 4)^n	3n(3x - 4)^(n-1)
3^x	3^x LN(3)	(3^x)^n	3^(nx) n LN(3)
5^x	5^x LN(5)	(5^x)^n	5^(nx) n LN(5)
cos(x)	-sin(x)	cos(x)^n	-n sin(x) cos(x)^(n-1)
sin(x)	cos(x)	sin(x)^n	n sin(x)^(n-1) cos(x)
x^2 - 1	2x	(x^2 - 1)^n	2 n x (x^2-1)^(n-1)
x^3 - 5x + 7	3x^2 - 5	(x^3 - 5x + 7)^n	n(x^3 - 5x + 7)^(n-1) (3x^2 - 5)
x^7 - 7	7x^6	(x^7 - 7)^n	7n x^6 (x^7 - 7)^(n-1)

Tukaj bo morebiti nekaj več težav. Pri drugem zgledu je rezultat $3^n \cdot n \cdot x^{n-1}$ in morajo dijaki prepoznati v tem $3 \cdot n \cdot (3x)^{n-1}$. Prav tako v četrem in petem zgledu vzorec ni takoj razpoznaven.

$$((f(x))^n)' = f'(x) \cdot n \cdot (f(x))^{n-1}$$

Pri kvadratni funkciji dijaki večjih težav navadno nimajo. Če pričakujete težave, dodajte še kompozitum s kubično funkcijo.



y =	y' =	y =	y' =/napoved/	y' =/*DERIVE*/
x - 2	1	(x - 2)^2	2 (x - 2)	2 (x - 2)
3x	3	(3x)^2	3 2 (3x)	18 x
3x - 4	3	(3x - 4)^2	3 2 (3x - 4)	6 (3x - 4)
3^x	3^x LN(3)	(3^x)^2	3^x LN(3) 2 3^x	2 3^{2x} LN(3)
5^x	5^x LN(5)	(5^x)^2	5^x LN(5) 2 5^x	2 5^{2x} LN(5)
cos(x)	-sin(x)	(cos(x))^2	-sin(x) 2 cos(x)	- 2 sin(x)cos(x)
sin(x)	cos(x)	(sin(x))^2	cos(x) 2 sin(x)	2 sin(x)cos(x)
x^2	2x	(x^2)^2	2x 2 x^2	$4x^3$
x^3 - 5x + 7	$3x^2$ - 5	(x^3 - 5x + 7)^2	($3x^2$ - 5)2(x^3-5x+7)	2 (x^3-5x+7) ($3x^2$ - 5)
x^7 - 7	$7x^6$	(x^7 - 7)^2	$7x^6$ 2 (x^7 - 7)	$14x^6$ (x^7 - 7)

$$(f(x)^2)' = f'(x)\,2\,f(x)$$

Pri uporabi pravila za odvod kompozituma ni pričakovati večjih težav, saj za pripravljene izraze *DERIVE* vrača rezultate praktično v pričakovani obliki. Velja pa opozoriti, da pri nekaterih funkcijah (npr. odvod $(5+\cos(x))^3$) *DERIVE* rezultat precej preoblikuje (dobimo `-3·sin(x)·(cos(x))^2 - 30·sin(x)·cos(x) - 75·sin(x)`)

Pri pravilu za odvajanje kompozituma treh funkcij je zanimivo, da se pogosto zgodi, da dijak ne zna ne opisati pravila, niti ga zapisati simbolično, zna pa ga uporabiti! Prav tako dijaki pogosto ne vidijo, da so izrazi, ki so jih dobili, enaki (enakovredni) tistim, ki jih da program. Zato naj svoje izraze vnesejo v *DERIVE* in jih poenostavijo. V redkih primerih, ko to ne zadošča, naj svojo rešitev odštejejo od rešitve, ki jo da program, in razliko poenostavijo. Če bo poenostavljena rešitev enaka 0, je to dokaz, da sta rešitvi enaki.